MA2115 Clase 8: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

Es muy común encontrar que los modelos matemáticos que se necesitan para el estudio de problemas de nuestra actividad diaria tienen implícitas ecuaciones que dependen de una función y sus derivadas. Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones diferenciales, son el objetivo a estudiar en el resto del curso. Veamos la definición formal.

1 Definiciones y ejemplos

Definición 1 *Una ecuación diferencial ordinaria, o más brevemente EDO, es una ecuación de la forma*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

donde F es una función de $n+2$ variables e y es una función de x, $y^{(n)}$ indica la n-ésima derivada de y respecto de x.

Ejemplo 1 *Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son los siguientes:*

1. $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$,
2. $y'' + y' + x = \cos x$,
3. $(x^2 + y^2)dx - (x + y)dy = 0$,
4. $y' + xy = 0$,
5. $y''' + y'' - 1 = 0$,
6. $(y'')^4 + 3y' + 2y = 0$,
7. $\dfrac{d^3x}{dy^3} + x\dfrac{dx}{dy} - 4xy = 0$,
8. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = \cos x$.

Definición 2 *Se dice que una EDO tiene orden n si la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la derivada n-ésima.*

Por ejemplo, damos a continuación una tabla con algunas ecuaciones diferenciales y sus respectivos órdenes:

Ecuación	**Orden**
$y' + xy = e^x$	1
$y'' + p(x)y = 0$	2
$y^{(4)} + xy'' = \operatorname{sen} x$	4
$x^3y^{(3)} - y' + 6y = e^x$	3
$y'x^2 + y = e^x \cos x$	1
$y'e^x + y''x^2 + \dfrac{y'}{x^2+1} = y'x$	2
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{(3)} - 4y = e^x$	2

Definición 3 *Una solución de una EDO de orden n, es una función $y = \phi(x)$ definida en un intervalo abierto (a,b), la cual tiene derivada de al menos orden n, tal que al hacer la sustitución $y = \phi(x)$ en la ecuación diferencial ordinaria, ésta se convierte en una identidad en (a,b). La gráfica de la solución $y = \phi(x)$ de la EDO es llamada curva integral de la EDO.*

Observemos que la integral indefinida (o anti-derivada) de una función f, es la solución de una ecuación diferencial del tipo $y' = f(x)$. Por ejemplo, $y = \ln(x-1) + C$ es solución de $y' = \dfrac{1}{x-1}$. En vista de esto, podemos decir que cada procedimiento que estudiemos para resolver una ecuación diferencial (es decir, hallar todas sus soluciones) es una generalización de la integración de funciones.

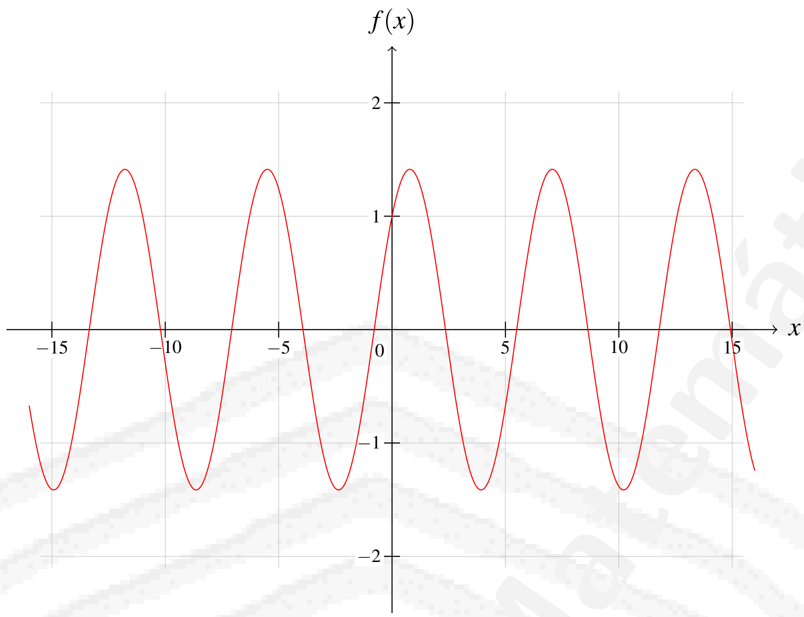
Ejemplo 2 *Verifique que, para todas las constantes reales a y b $y = a\cos 2x + b\operatorname{sen} 2x$ es solución de $y'' + 4y = 0$.*

Solución: En efecto,

$$\begin{aligned} y'' &= (a\cos 2x + b\operatorname{sen} 2x)'' = (-2a\operatorname{sen} 2x + 2b\cos 2x)' \\ &= -4a\cos 2x - 4b\operatorname{sen} 2x = -4\,(a\cos 2x + b\operatorname{sen} 2x) = -4y. \end{aligned}$$

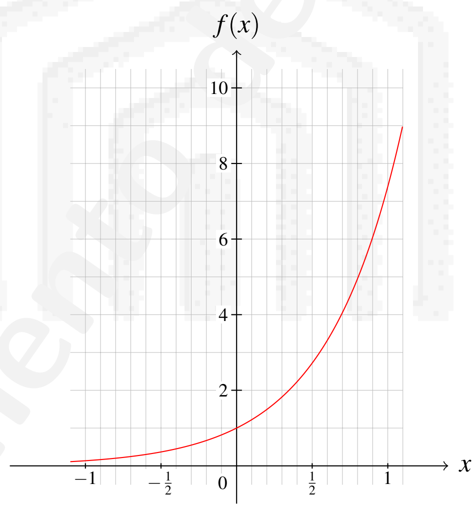
$\square$

Ejemplo 3 *La curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.*



Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

Ejemplo 4 *La curva* $y = e^{2x}$ *es solución de la ecuación diferencial* $y'' + y' - 6y = 0$.



Gráfica de $f(x) = e^{2x}$

Definición 4 *Una EDO* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *se llama lineal si* F *es lineal en las variables* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, *es decir, la ecuación es de la forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Ejemplo 5

1. *La ecuación* $y' = -2y$ *es lineal y tiene por solución* $y = e^{-2x}$.

2. *La ecuación* $yy' = x$ *no es lineal y tiene por solución* $x^2 - y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

3. *La ecuación* $(y''')^2 x^3 - \dfrac{2}{x+2} y'' = (y')^4 e^x$ *no es lineal.*

4. *La ecuación* $y' - 2xy = x$ *es lineal.*

Definición 5 *Una EDO de primer orden* $y' = f(x,y)$ *sujeta a la condición* $y(x_0) = y_0$ *es llamado un problema de valor inicial. La condición* $y(x_0) = y_0$ *se denomina condición inicial.*

Ejemplo 6 *La ecuación diferencial* $y' = -2y$ *tiene solución general* $y = Ke^{-2x}$. *Si además se tiene el valor* $y(1) = 2$, *entonces, sustituyendo* $x = 1$ *e* $y = 2$ *en* $y = Ke^{-2x}$ *obtenemos* $2 = Ke^{-2}$, *de donde* $K = 2e^2$. *Por lo tanto,* $y = 2e^2 e^{-2x}$ *es la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

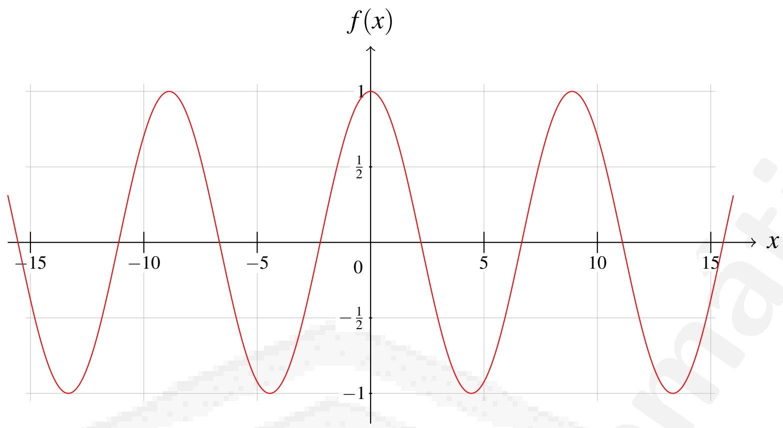
2 Origen de algunas ecuaciones diferenciales

2.1 Caida Libre

Es conocido que el recorrido vertical de un cuerpo que cae libremente viene dado por $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -g$, donde s es la distancia recorrida, t es el tiempo y g la aceleración. Supongamos que queremos una función s que describa la distancia vertical de una partícula en caida libre, desde el punto en el cual cae, y supongamos que dicho punto está suficientemente cerca de la superficie de la Tierra de modo que podamos suponer la aceleración de gravedad, denotada por g, constante. Entonces, sabemos que s satisface la ecuación diferencial $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -g$.

2.2 Elongación de resorte

Para encontrar el desplazamiento vertical $x(t)$ de una masa sujeta a un resorte se usan las leyes empíricas siguientes: la segunda ley de Newton y la ley de Hooke. La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza total que actúa sobre una particula en movimiento está dada por $F = m \times a$, donde m es la masa de la partícula y a es la aceleración (la cual está dada por $x''(t)$). La ley de Hooke nos dice que la fuerza de restitución de un resorte estirado es proporcional a su elongación $s + x$. Es decir, existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\kappa(s + x)$ es dicha fuerza de restitución. Comparando estas fórmulas para la fuerza total, obtenemos una ecuación diferencial para la elongación del resorte x, a saber, $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \kappa(s+x)$ donde x es el desplazamiento vertical de una masa sujeto a un resorte, m es la masa y κ la constante de proporcionalidad.



Gráfica de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, la solución de $y'' = -\dfrac{1}{2}y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2.3 El Péndulo Simple

Una masa m de peso W se suspende del extremo de una varilla de longitud constante R. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, queremos determinar el ángulo de desplazamiento θ, medido con respecto a la vertical, en función del tiempo t. Recordemos que el arco s, que barre un ángulo θ en un círculo de radio R, está dado por $s = R\theta$. Por lo tanto, la aceleración angular es

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Ahora, en virtud de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$F = ma = mR\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

mientras que si calculamos la fuerza directamente (como la componente vertical del vector aceleración $\times$ la masa de la particula), tenemos que $F = -mg \operatorname{sen}\theta$ y, en suma,

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta.$$

3 Ecuación diferencial asociada a una ecuación.

Definición 6 *Una ecuación de la forma $F(x,y,c_1,c_2) = 0$ es llamada una familia de curvas 2-paramétrica.*

Ejemplo 7 *Las siguientes ecuaciones son familias de curvas 2-paramétricas:*

1. $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = 9$,
2. $c_1 e^{x+c_2} + \cos x = e^x$.

1. Dada la ecuación $y = C_1e^x + C_2$, podemos buscar la EDO asociada. Esta ecuación es 2-paramétrica por lo tanto la EDO es de segundo orden. Derivamos $y = C_1e^x + C_2$ y se tiene $\frac{dy}{dx} = C_1e^x$ y la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = C_1e^x$. De aquí se tiene que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$.
2. Consideremos la ecuación $y = cx^3$, encontremos su ecuación diferencial. Derivando obtenemos $y' = 3cx^2$. Despejamos c de la ecuación $y = cx^3$ se tiene que $c = \frac{y}{x^3}$, siempre que $x \neq 0$. Sustituyendo el valor de c en la ecuación $y' = 3cx^2$ se tiene $y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2 = 3\frac{y}{x}$. De donde $x\frac{dy}{dx} = 3y$.
3. Consideremos la ecuación $x^3 - 3x^2y = c$, encontremos su ecuación diferencial. Derivando obtenemos $3x^2 - 6xy + 3x^2y' = 0$. Ahora despejamos y' de esta última ecuación para obtener $y' = \frac{6xy - 3x^2}{3x^2}$. Es decir, $y' = \frac{2y}{x} - 1$.

Ejemplo 8 *Encontrar la ecuación diferencial asociada con:*

1. $x = c(y-b)^2 + a$

Solución: *Por una parte, derivando con respecto a y la ecuación* $x = c(y-b)^2 + a$ *resulta* $\frac{dx}{dy} = 2c(y-b)$ *y, por otra parte , despejando c en* $x = c(y-b)^2 + a$ *se tiene que* $c = \frac{x-a}{(y-b)^2}$. *En suma,* $\frac{dx}{dy} = 2\frac{x-a}{(y-b)^2}(y-b)$. *Es decir,* $\frac{dx}{dy} = 2\frac{x-a}{(y-b)}$.

2. $y = cx^2$

Solución: $y = cx^2 \Rightarrow y' = 2cx$. *Como* $c = \frac{y}{x^2}$ *se tiene que* $y' = 2\frac{y}{x^2}x \Rightarrow y' = 2\frac{y}{x}$.

3. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = c^2$.

Solución: *Diferenciando* $(x-2)^2 + (y+1)^2 = c^2$ *se obtiene* $2(x-2) + 2(y+1)\frac{dy}{dx} = 0$. *Por lo tanto,* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y+1}$, *siempre que* $y \neq -1$.

La familia de círculos dada corresponde a dos familias de semi-círculos

$$y = -1 + \sqrt{c^2 - (x-2)^2}, \tag{1}$$

$$y = -1 - \sqrt{c^2 - (x-2)^2}. \tag{2}$$

En la ecuación (1) tenemos una familia de soluciones de la ecuación diferencial para $y > -1$. *En la ecuación (2) tenemos una familia de soluciones de la ecuación diferencial para* $y < -1$.

Si le damos valores iniciales a $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y+1}$ *para* $y = 2$ *cuando* $x = -1$, *se debe elegir c de (1), ya que* $2 > -1$, $2 = -1 + \sqrt{c^2 - 9}$ *ó* $c = \sqrt{18}$. *Así,* $y = \sqrt{18 - (x-2)^2}$ *es la solución que se busca.*

4 Trayectorias Ortogonales

Definición 7 *Sea $\mathscr{C}$ una curva dada y $\mathscr{F}$ una familia de curvas. Se dice que $\mathscr{C}$ es una trayectoria ortogonal de la familia $\mathscr{F}$ si $\mathscr{C}$ corta ortogonalmente a todas las curvas de $\mathscr{F}$.*

Procedimiento para determinar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas dadas.

i) Se halla la ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$.

ii) Se halla la ecuación diferencial ortogonal $F(x,y,-\frac{dx}{dy})$.

Ejemplo 9

Encuentre una ecuación diferencial satisfecha por la familia ortogonal a la familia $y=\frac{c}{x}$.

Solución: $y=\frac{c}{x}$ *luego* $y'=-\frac{c}{x^2}=\frac{c}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)$, *entonces* $y'=-\frac{y}{x}$.

La ecuación diferencial ordinaria que satisface la familia ortogonal es $y'=\frac{x}{y}$, *es decir,* $yy'=x$.

2. *Encuentre la familia ortogonal a la familia dada de curvas* $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$.

Solución: *Derivando* $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ *se tiene que* $2(x-2)+2(y-1)y'=0$, *de donde* $y'=-\frac{x-2}{y-1}$. *Ahora* $y_1'=-\frac{1}{f'(x)}=\frac{y_1-1}{x-2}=\frac{dy_1}{dx}$, *con lo cual la ecuación diferencial buscada es* $\frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{x-2}$, *es decir,* $(x-2)y'=y-1$.

3. *Encuentre una ecuación diferencial satisfecha por la familia ortogonal a la familia* $y=\frac{cx}{1+x}$.

Solución: *Derivando* $y=\frac{cx}{1+x}$, *se tiene que* $y'=\frac{(1+x)c-cx}{(1+x)^2}=\frac{c}{(1+x)^2}$. *Por lo tanto,*

$$y'=\frac{c}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{cx}{1+x}\cdot\frac{1}{x(1+x)}=y\frac{1}{x(1+x)},$$

de donde $y'=\frac{y}{x^2+x}$.

La ecuación diferencial ordinaria satisfecha por la familia ortogonal a la familia $\mathbb{F}$ *es* $y'=-\frac{x+x^2}{y}$ *o* $yy'+x+x^2=0$.

Correcciones y gráficos: Boris Iskra

May 13, 2008